CSGE **PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES** T'

DURÉE : 4 heures

La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront un élément important pour l'appréciation des copies.

L'usage des instruments de calcul est autorisé.

NOTATIONS ET OBJECTIF DU PROBLÈME

L'objet du problème est d'exprimer l'intégrale :

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{it}\, t^{\alpha-1}\, dt$$

en fonction de l'intégrale eulérienne :

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\, t^{\alpha-1}\, dt,$$

ce qui fait l'objet de la partie II.

Dans la partie I, on étudie la convergence d'intégrales utilisées dans la suite du problème.

Enfin, dans la partie III, on applique les résultats obtenus à l'étude des spirales de Cornu.

I. CONVERGENCE D'INTÉGRALES ATTACHÉES À DES FONCTIONS PÉRIODIQUES

Soit E le C-espace vectoriel des fonctions 2π-périodiques à valeurs réelles ou complexes et continues sur $\mathbb{R}$, muni de la norme $\varphi \longmapsto N_\infty(\varphi) = \sup_{t\in\mathbb{R}} |\varphi(t)|$.

On se propose d'étudier, pour $x \geqslant 0$, l'intégrale :

$$A(x) = \int_x^{+\infty} \varphi(t)\, t^{\alpha-1}\, dt, \quad \text{où} \quad \varphi \in E.$$

1. *Valeur moyenne d'une fonction périodique.*

Soit φ un élément de E. Montrer que, pour tout nombre réel c,

$$\frac{1}{2\pi}\int_c^{c+2\pi} \varphi(t)\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(t)\, dt.$$

a. Ce nombre est appelé valeur moyenne de φ, et noté $M(\varphi)$. Prouver que $M(|\varphi|) \leqslant N_\infty(\varphi)$.

b. Soient D la droite de E constituée des fonctions constantes et H le noyau de la forme linéaire $\varphi \longmapsto M(\varphi)$. Montrer que $E = D \oplus H$ et expliciter les projecteurs correspondants.

c. Soit φ un élément de E ; montrer que φ appartient à H si et seulement si toute primitive de φ est 2π-périodique. Prouver qu'il existe alors une primitive ψ de φ et une seule appartenant à H, et que, pour tout nombre réel x,

$$\psi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\int_u^x \varphi(t)\, dt\right) du.$$

En déduire que $N_\infty(\psi) \leqslant 2\pi\, M(|\varphi|)$.

2. *Convergence de l'intégrale* $A(x)$ *pour* $x > 0$.

Soient α un nombre réel tel que $\alpha < 1$ et x un nombre réel strictement positif.

a. Soit χ un élément de E. Montrer que, pour tout nombre réel $\beta < 0$, l'intégrale :

$$\int_x^{+\infty} \chi(t)\, t^{\beta-1}\, dt$$

est absolument convergente, et majorer son module à l'aide de $N_\infty(\chi)$.

b. Soit φ un élément de H. Montrer que l'intégrale $A(x)$ est convergente. Pour cela, on pourra introduire la primitive χ de φ s'annulant au point x et se ramener à la question *a.* en intégrant par parties.

Établir la majoration, pour tout $x > 0$,

$$|A(x)| \leqslant 2\pi\, M(|\varphi|)\, \frac{1}{x^{1-\alpha}}. \tag{1}$$

c. Étudier la convergence de l'intégrale $A(x)$ lorsque $M(\varphi)$ n'est pas nul.

d. Soient φ un élément de H et ψ l'unique primitive de φ appartenant à H. Prouver que, pour tout $x > 0$,

$$A(x) = -\psi(x)\, \frac{1}{x^{1-\alpha}} + \int_x^{+\infty} \psi(t)\,(1-\alpha)\, t^{\alpha-2}\, dt. \tag{2}$$

Dans le cas où ψ ne s'annule pas, en déduire la partie principale de l'intégrale $A(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

e. Exemples :

— Étudier la convergence de l'intégrale $A(x) = \int_x^{+\infty} e^{it}\, t^{\alpha-1}\, dt$ et déterminer la partie principale de $A(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

— Étudier de même l'intégrale $A_n = \int_{n\pi}^{+\infty} \cos t\; t^{\alpha-1}\, dt$, où n est un entier naturel non nul.

— Étudier enfin la convergence de $\int_x^{+\infty} e^{i\omega t}\, \frac{\sin t}{t}\, dt$, où ω est un nombre réel strictement positif.

3. *Convergence de cette intégrale sur* $]0, +\infty[$.

a. On suppose que $0 < \alpha < 1$ et que φ appartient à H.

Montrer que l'intégrale $I_\varphi = A(0) = \int_0^{+\infty} \varphi(t)\, t^{\alpha-1}\, dt$ est convergente et que la forme linéaire qui à tout élément φ de H associe cette intégrale I_φ est continue (l'espace H étant muni de la norme N_∞).

b. Montrer que si $\alpha \leqslant 0$ et si $\varphi(0) \neq 0$, l'intégrale I_φ diverge.

c. Étudier le cas où $-1 < \alpha \leqslant 0$ et où φ est de classe C^1 et s'annule en 0.

d. Exemples : Étudier la convergence des intégrales :

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{it}\, t^{\alpha-1}\, dt \quad \text{et} \quad J(\alpha) = \int_0^{+\infty} \sin t\; t^{\alpha-1}\, dt.$$

Tournez la page S. V. P.

II. CALCUL DE $I(\alpha)$ À L'AIDE DE $\Gamma(\alpha)$

On suppose que $0 < \alpha < 1$. La méthode proposée consiste à étudier la fonction définie sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ par la relation :

$$F(\theta) = \int_0^{+\infty} \exp\left(-t\,e^{-i\theta}\right) t^{\alpha-1}\,dt,$$

en observant que $F(0) = \Gamma(\alpha)$ et $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = I(\alpha)$.

1. *Convergence de l'intégrale* $F(\theta)$.

a. Montrer que, pour tout nombre réel $x > 0$, l'intégrale :

$$\int_x^{+\infty} \exp\left(-t\,e^{-i\theta}\right) t^{\alpha-1}\,dt, \quad \text{où} \quad \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],$$

converge et que son module est majoré par $\frac{2}{x^{1-\alpha}}$. (On pourra s'inspirer de la méthode utilisée en I.2.*b*.)

b. En déduire la convergence de l'intégrale $F(\theta)$.

2. *Continuité de la fonction* F *sur* $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Pour tout entier naturel non nul n, on pose :

$$F_n(\theta) = \int_{\frac{1}{n}}^{n} \exp\left(-t\,e^{-i\theta}\right) t^{\alpha-1}\,dt, \quad \text{où} \quad \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

a. Prouver que F_n est continue sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

b. Étudier la convergence de F_n vers F.

c. Montrer que F est continue sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

3. *Dérivation de la fonction* F *sur* $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

a. Établir la convergence de l'intégrale :

$$G(\theta) = i\,e^{-i\theta} \int_0^{+\infty} \exp\left(-t\,e^{-i\theta}\right) t^{\alpha}\,dt, \quad \text{où} \quad \theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[.$$

b. Montrer que F_n est de classe C^1 sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et exprimer F_n' sous forme d'une intégrale.

c. Étudier la convergence de F_n' vers G.

d. Montrer que F est de classe C^1 sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et que $F' = G$.

4. *Calcul de la fonction* F *et de* $I(\alpha)$.

a. En transformant convenablement G, montrer que F satisfait sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ à l'équation différentielle :

$$F'(\theta) = i\alpha\,F(\theta).$$

b. Exprimer $F(\theta)$ à l'aide de $\Gamma(\alpha)$, lorsque θ appartient à $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

c. Prouver enfin que, si $0 < \alpha < 1$, $I(\alpha) = \Gamma(\alpha)\,e^{i\alpha\frac{\pi}{2}}$.

d. Application. Prouver que, pour tout nombre réel $\beta > 1$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \exp\left(iu^{\beta}\right) du$ est convergente et calculer sa valeur à l'aide de la fonction Γ.

Expliciter en particulier la valeur des intégrales de Fresnel :

$$\int_0^{+\infty} \cos\left(u^2\right) du \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \sin\left(u^2\right) du$$

en utilisant la relation (admise) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

5. *Calcul de l'intégrale* $J(\alpha)$.

On suppose que $0 \leqslant \alpha < 1$, et on pose $J(\alpha) = \int_0^{+\infty} \sin t\; t^{\alpha-1}\,dt$.

a. Établir que, si $0 < \alpha < 1$, $J(\alpha) = \Gamma(\alpha)\sin\frac{\alpha\pi}{2}$.

b. Prouver que la fonction J est continue sur $[0, 1[$.

c. On admet que Γ est continue sur $]0, +\infty[$ et que, pour $\alpha > 0$, $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\,\Gamma(\alpha)$. En déduire la partie principale de $\Gamma(\alpha)$ lorsque α tend vers 0.

d. Déterminer la valeur $J(0) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$.

III. APPLICATION AUX SPIRALES DE CORNU

Soit C la courbe plane définie par la représentation paramétrique :

$$x(t) = \int_0^t \cos\left(u^2\right) du \qquad y(t) = \int_0^t \sin\left(u^2\right) du.$$

1. Montrer que C admet O pour centre de symétrie et préciser la tangente au point O.

2. Soit $M(t)$ le point d'affixe $x(t) + i\,y(t)$. Déterminer les limites A et B de $M(t)$ lorsque t tend respectivement vers $+\infty$ et $-\infty$.

3. Dresser le tableau de variation de C.

4. On pose, pour $t \geqslant 0$, $g(t) = \int_t^{+\infty} e^{iu^2}\,du$.

a. Interpréter géométriquement $g(t)$, puis $|g(t)|$.

b. Prouver que $g(t) \sim \frac{i}{2}\frac{e^{it^2}}{t}$ lorsque t tend vers $+\infty$. Interpréter géométriquement ce résultat.

5. Donner l'allure de la courbe C.

6. On pose, pour $t \geqslant 0$, $h(t) = |g(t)|^2$.

a. Montrer que h est de classe C^1 sur $[0, +\infty[$ et que $h'(t) = -\int_0^{+\infty} \frac{\cos v}{\sqrt{v+t^2}}\,dv$.

b. Exprimer $-h'(t)$ à l'aide de la série de terme général $w_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\cos v}{\sqrt{v+t^2}}\,dv$. En déduire que h' est négative. (Pour cela, on pourra effectuer une intégration par parties.) Interpréter géométriquement le résultat ainsi obtenu.